



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

06F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۳/۳۰

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح سؤال	ویراستاران
نیما نیکنام	سید جواد نظری
	ارسلان حسنونند

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱- اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی کرده‌ایم که تعداد اعداد در هر دسته برابر شماره آن دسته است.
 $\dots, (12, 10, 8), (6, 4), (2)$ ، واسطه هندسی بین آخرین عدد دسته چهارم و آخرین عدد دسته نهم کدام است؟

(۱) ± 15 (۲) ± 30 (۳) $\pm 15\sqrt{2}$ (۴) $\pm 30\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

تعداد اعداد زوج تا آخرین عدد دسته n ام برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$ و k امین عدد زوج برابر $2k$ است، از طرفی آخرین عدد دسته چهارم برابر دهمین عدد زوج $\left(\frac{4 \times 5}{2} = 10\right)$ یعنی $2 \times 10 = 20$ است.

آخرین عدد دسته نهم برابر چهل و پنجمین عدد زوج $\left(\frac{9 \times 10}{2} = 45\right)$ یعنی $2 \times 45 = 90$ است.
 از طرفی اگر b واسطه هندسی بین اعداد a, c باشد، باید $b^2 = ac$ باشد، بنابراین:

$$b^2 = 90 \times 20 = 1800 \Rightarrow b = \pm 30\sqrt{2}$$

۲- دو نفر با هم کاری را در شش روز تمام می‌کنند، اگر هر یک به تنهایی کار کنند، فرد A پنج روز زودتر از فرد B کار را تمام می‌کند، فرد A چند روزه کار را تمام می‌کند؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

دقت کنید برای ساختن معادله، فرض کنید کل کار برابر x باشد و توان کارکرد فرد A در یک روز، a و توان کارکرد فرد B در یک روز، b و زمانی که لازم است تا A کار را تمام کند t و زمانی که لازم است که B کار را تمام کند $t+5$ باشد، در این صورت جدول زیر را داریم:

کل کار	زمان	توان کارکرد در یک روز
x	t	فرد A
x	$t+5$	فرد B
x	6	B, A

از طرفی $\frac{\text{کل کار}}{\text{زمان}} = \text{توان کار}$

یعنی: $a = \frac{x}{t}$ و $b = \frac{x}{t+5}$ و $a+b = \frac{x}{6}$ بنابراین: $\frac{x}{t} + \frac{x}{t+5} = \frac{x}{6} \Rightarrow a+b = \frac{x}{6}$
 با فاکتور گرفتن از x و ساده کردن آن از دو طرف داریم:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{t+5+t}{t^2+5t} = \frac{1}{6} \Rightarrow 12t+30=t^2+5t \Rightarrow t^2-7t-30=0 \Rightarrow \begin{cases} t=10 \checkmark \\ t=-3 \times \end{cases}$$

این مثال را هم ببینید.

دو نفر با هم کاری را در ۶ روز انجام می‌دهند. اگر هر یک به تنهایی کار کنند در زمانی که فرد A می‌تواند کار را تمام کند، فرد B $\frac{2}{3}$ کار را انجام می‌دهد، فرد A چند روزه کار را تمام می‌کند؟

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



در این حالت معادله به این شکل بود:

$$\frac{x}{t} + \frac{\frac{2}{3}x}{t} = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{2}{3t} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{3t} = \frac{1}{6} \Rightarrow 3t = 30 \Rightarrow t = 10.$$

۳- مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{2x-1}{x-1} < 3$ کدام است؟

(۰, ۲)

 $R - [0, 2]$

(۰, ۱)

 $R - [0, 1]$

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: مرزهای جواب یا ریشه‌های مخرج هستند یا نامعادله را به معادله تبدیل می‌کنند، از طرفی در این نامعادله ریشه مخرج نمی‌تواند مرز جواب باشد، زیرا در اطراف $x=1$ حاصل کسر $\frac{2x-1}{x-1}$ به بی‌نهایت میل می‌کند و بی‌نهایت بین ۱ و ۳ نیست پس مرزهای این نامعادله ریشه‌های معادلات زیر است:

$$1) \frac{2x-1}{x-1} = 1 \Rightarrow 2x-1 = x-1 \Rightarrow x = 0$$

$$2) \frac{2x-1}{x-1} = 3 \Rightarrow 2x-1 = 3x-3 \Rightarrow x = 2$$

از طرفی به‌ازای x های بین ۰ و ۲، نامعادله غلط می‌شود و جواب $x < 0$ یا $x > 2$ است، یعنی: $R - [0, 2]$

روش دوم: استفاده از اختلاف گزینه‌ها.

عددی را انتخاب می‌کنیم که در دو گزینه باشد و در دو گزینه نباشد، مثل $x=4$ (در گزینه‌های ۱ و ۳ هست و در گزینه‌های ۲ و ۴ نیست) به‌ازای $x=4$ نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید که درست است.

$$1 < \frac{2x-1}{x-1} < 3 \xrightarrow{x=4} 1 < \frac{7}{3} < 3$$

بنابراین یکی از گزینه‌های شامل ۴، یعنی گزینه‌های ۱ یا ۳ درست هستند، حال عدد دیگری انتخاب می‌کنیم که در یکی از گزینه‌های ۱ یا ۳ باشد و در دیگری نباشد، مثل $x = \frac{3}{4}$ که در گزینه ۱ هست و در گزینه ۳ نیست به‌ازای $x = \frac{3}{4}$ داریم:

$$1 < \frac{2x-1}{x-1} < 3 \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} 1 < \frac{2}{1} < 3 \Rightarrow 1 < 2 < 3$$

که غلط است، پس گزینه ۱ غلط است و جواب گزینه ۳ می‌باشد.

به حل دو نامعادله زیر توجه کنید:

$$\text{الف) } \frac{3}{x-2} < 1$$

$x=2$ یکی از مرزها و جواب معادله زیر مرز دیگر است، یعنی:

$$\frac{3}{x-2} = 1 \Rightarrow 3 = x-2 \Rightarrow x = 5$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



چون این ریشه‌ها ریشه‌های مضاعف (بدون تغییر وضعیت) نیستند وضعیت نامعادله در دو طرف آنها تغییر می‌کند، حال با انتخاب یک عدد مثلاً $x = 0$ وضعیت نامعادله را در آن بررسی می‌کنیم:

$$x=0 \rightarrow -\frac{3}{2} < 1$$

که درست است حال در جدول زیر بر این اساس که وضعیت دو طرف ۲ و ۵ یکسان نیست جواب را مشخص می‌کنیم.

	ریشه مخرج				
X	$-\infty$	۰	①	۵	$+\infty$
وضعیت	درست	درست	نادرست	درست	درست
			عوض شده	عوض شده	

یعنی جواب به صورت $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$ است.

(ریشه‌های معادلات $(x-\alpha)^{2k} = 0$ و $|x-\alpha| = 0$ ریشه‌های بدون تغییر وضعیت یا اصطلاحاً مضاعف می‌باشند).

ب) $\frac{4}{|x-1|} > 1$

در این مثال $x=1$ که ریشه مخرج است، ریشه بدون تغییر وضعیت است یعنی دو طرف $x=1$ وضعیت نامعادله یکسان است از طرفی ریشه‌های تبدیل نامعادله به معادله به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{4}{|x-1|} = 1 \Rightarrow |x-1| = 4 \Rightarrow x = 5, -3$$

و جدول تعیین وضعیت به صورت زیر است:

	ریشه مخرج				
X	$-\infty$	-۳	①	۵	$+\infty$
وضعیت					

با قرار دادن $x=0$ در نامعادله، حاصل به صورت $4 > 1$ که درست است، حال جدول را به صورت زیر کامل می‌کنیم:

X	$-\infty$	-۳	۰	۱	۵	$+\infty$
وضعیت	نادرست	نادرست	درست	درست	نادرست	نادرست
			عوض نشده	عوض شده	عوض شده	

بنابراین جواب نامعادله به صورت $\{1\} - (-3, 5)$ می‌باشد.

۴- نمودار تابع $f(x) = |x|$ را چهار واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و در نهایت،

پنج واحد به بالا انتقال می‌دهیم، مجموع طول نقاط برخورد نمودار جدید با نمودار تابع f کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

$$|x| \xrightarrow[\text{راست}]{\text{واحد به سمت}} |x-4| \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به}} -|x-4| \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{واحد به سمت}} 5-|x-4|$$

در نهایت، معادله $|x| = 5 - |x-4|$ را حل می‌کنیم و مجموع ریشه‌ها را مشخص می‌کنیم.

$$|x| + |x-4| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \rightarrow 2x - 4 = 5 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \\ x < 0 \rightarrow -2x + 4 = 5 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

و مجموع ریشه‌ها برابر $4 = \frac{9}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$ است.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



نکته: معادله $|x - \alpha| + |x - \beta| = k$ به شرطی که $k > |\alpha - \beta|$ باشد، دارای دو ریشه است و مجموع دو ریشه، دو برابر محور تقارن تابع $y = |x - \alpha| + |x - \beta|$ (یعنی $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$) است، بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر $\alpha + \beta$ است.

۵- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $y = -1$ را در نقاطی به طول‌های $x = -3$ و $x = 1$ قطع می‌کند و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند، در این صورت کدام نقطه زیر، روی نمودار سهمی قرار دارد؟

- (۱) $(3, -14)$ (۲) $(2, -6)$ (۳) $(3, -12)$ (۴) $(2, -4)$

پاسخ: گزینه ۲

اولاً دقت کنید، طول رأس سهمی وسط $x = 1$ و $x = -3$ است، یعنی: $x_0 = \frac{-3+1}{2} = -1$ بنابراین معادله سهمی را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$y = a(x+1)^2 + y_0$$

از طرفی نقاط $(1, -1)$ و $(0, 2)$ روی سهمی قرار دارند و با صدق دادن این نقاط در معادله، a ، y_0 را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(1, -1)} & \begin{cases} -1 = 4a + y_0 \\ 2 = a + y_0 \end{cases} \Rightarrow a = -1, y_0 = 3 \\ \xrightarrow{(0, 2)} & \end{aligned}$$

بنابراین، معادله سهمی به‌صورت $y = -(x+1)^2 + 3$ می‌باشد که نقطه $(2, -6)$ یعنی گزینه ۲ در آن صدق می‌کند.

نکته: ضابطه تابع درجه ۲ را علاوه بر صورت کلی $y = ax^2 + bx + c$ ، به دو صورت زیر هم می‌توان در نظر گرفت:

$$1) y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

که در آن (x_0, y_0) مختصات رأس سهمی است:

$$y_0 = f(x_0) = -\frac{\Delta}{4a}, \quad x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$2) y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

که در آن α و β طول نقاط برخورد تابع با محور x ها هستند:

$$\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۶- اگر تابع g ، وارون تابع $f(x) = x + 1 + \sqrt{x-1}$ باشد، حاصل $g(4) + g(8)$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۷ (۳) ۱۵ (۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، در این صورت: $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

دقت کنید اگر $g(8) = a$ باشد، باید $f(a) = 8$ باشد و به همین ترتیب اگر $g(4) = b$ باشد، $f(b) = 4$ می‌باشد. بنابراین برای یافتن a, b باید معادلات زیر را حل کنیم یا جواب‌ها را حدس بزنیم.

الف) $a + 1 + \sqrt{a-1} = 8$

ب) $b + 1 + \sqrt{b-1} = 4$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



برای حدس ریشه‌ها با توجه به گزینه‌ها باید a, b را طوری انتخاب کنیم که $a-1$ و $b-1$ مربع کامل باشند. $(b=2, a=5)$ یا معادلات را حل کنیم.

الف) $\sqrt{a-1} = 7-a \Rightarrow a-1 = 49-14a+a^2 \Rightarrow$

$a^2 - 15a + 50 = 0 \Rightarrow a = 10 \times, a = 5 \checkmark$

($a = 10$) در معادله صدق نمی‌کند.

ب) $\sqrt{b-1} = 3-b \Rightarrow b-1 = 9-6b+b^2 \Rightarrow$

$b^2 - 7b + 10 = 0 \Rightarrow b = 5 \times, b = 2 \checkmark$

($b = 5$) در معادله صدق نمی‌کند.

$g(4) + g(8) = b + a = 2 + 5 = 7$

۷- اگر $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}$ ، برد تابع $f \circ f^{-1}$ کدام است؟

(۴) $[-2, 2]$

(۳) $[0, +\infty)$

(۲) $[1, 5]$

(۱) $\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه ۴

اولاً: $f \circ f^{-1}(x) = x$ و در تابع همانی دامنه و برد یکی است و دامنه f^{-1} همان دامنه f^{-1} است که با برد f برابر است، از طرفی چون f پیوسته و یک به یک است، حتماً اکیداً یکنواست و برای یافتن مرزهای برد آن کافی است، مقدار تابع را در مرزهای دامنه آن به دست آوریم. یعنی:

$f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x} \Rightarrow D_f = [1, 5]$

از طرفی: $f(1) = -2, f(5) = 2 \Rightarrow R_f = [-2, 2]$

بنابراین برد $y = f \circ f^{-1}(x)$ همان برد $y = f(x)$ یعنی $[-2, 2]$ است.

نکته: ترکیب یک تابع با معکوس آن همواره تابع همانی است، ولی $f \circ f^{-1}(x)$ و $f^{-1} \circ f(x)$ لزوماً با هم برابر نیستند، زیرا ممکن است دامنه‌هایشان برابر نباشد دقت کنید:

$D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$

و

$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}}$

در ضمن در تابع همانی دامنه و برد یکی است، پس:

$R_{f \circ f^{-1}} = D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$

و

$R_{f^{-1} \circ f} = D_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}}$

به مثال زیر توجه کنید:

$f = \{(2, 3), (5, 1), (4, 2)\}$ و $f^{-1} = \{(3, 2), (1, 5), (2, 4)\}$

$f \circ f^{-1} = \{(3, 3), (1, 1), (2, 2)\}$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$x \xrightarrow{f^{-1}} \bigcirc \xrightarrow{f} \square$$

$$f^{-1} \circ f = \{(2, 2), (5, 5), (4, 4)\}$$

$$x \xrightarrow{f} \bigcirc \xrightarrow{f^{-1}} \square$$

اولاً هر دو تابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ همانی هستند، ثانیاً در هر دو تابع، دامنه و برد با هم برابر است و ثالثاً:

$$D_{f \circ f^{-1}} = R_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$$

$$D_{f^{-1} \circ f} = R_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}}$$

۸- اگر چند جمله‌ای $2x^3 + kx^2 - 2x + 4$ بر $x - 1$ بخش پذیر باشد، مجموع ریشه‌های دیگر آن کدام است؟

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

اولاً چند جمله‌ای باید به ازای $x = 1$ صفر شود، بنابراین:

$$2 + k - 2 + 4 = 0 \Rightarrow k = -4$$

(باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - \alpha$ برابر $P(\alpha)$ می‌باشد).

ثانیاً چند جمله‌ای را تجزیه کرده و مجموع ریشه‌های دیگر را به دست می‌آوریم:

$$2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x - 1)(2x^2 - 2x - 4)$$

دقت کنید، برای تجزیه هم می‌توانیم $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ را بر $x - 1$ تقسیم کنیم و هم از این که ضرب $x - 1$ در $ax^2 + bx + c$

برابر $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ می‌شود، استفاده کنیم.

در نهایت جمع ریشه‌های دیگر برابر $-\frac{b}{a}$ ، در عبارت درجه ۲ است، یعنی: $\left(\frac{2}{2} = 1\right)$

روش دوم:

$$a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \theta) = a(x^3 - (\alpha + \beta + \theta)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\theta + \beta\theta)x - \alpha\beta\theta)$$

بنابراین، اگر عبارت $ax^3 + bx^2 + cx + d$ دارای سه ریشه باشد جمع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{d}{a}$ است.

در این صورت جمع ریشه‌های $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$ برابر $\frac{4}{2} = 2$ است و $1 + \alpha + \beta = 2$ بنابراین $\alpha + \beta = 1$ است.

۹- اگر $\log_5^2 = k$ باشد، حاصل $\log_8^{25}$ بر حسب k کدام است؟

۱) $\frac{2k}{6k-3}$

۲) $\frac{2k-4}{3-6k}$

۳) $\frac{2-k}{2k-1}$

۴) $\frac{k-2}{2k-1}$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که $\log_b^a = \frac{n}{m} \log_b^a$ داریم:

$$\log_8^{25} = \frac{2}{3} \log_2^5$$

بنابراین باید از رابطه $\log_5^2 = k$ حاصل $\log_2^5$ را به دست آوریم.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



حال با توجه به روابط زیر، داریم:

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

$$\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$$

$$\log_a^a = 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^k = \frac{\log_2^k}{\log_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log_2^k + \log_2^{\frac{1}{2}}}{\log_2^k + \log_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \log_2^k + \log_2^{\frac{1}{2}}}{\log_2^k + 2 \log_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 + \log_2^{\frac{1}{2}}}{1 + 2 \log_2^{\frac{1}{2}}} = k \Rightarrow 2 + \log_2^{\frac{1}{2}} = k + 2k \log_2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$(1 - 2k) \log_2^{\frac{1}{2}} = k - 2 \Rightarrow \log_2^{\frac{1}{2}} = \frac{k - 2}{1 - 2k}$$

بنابراین:

$$\log_8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_2^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{k - 2}{1 - 2k} \right) = \frac{2k - 4}{3 - 6k}$$

۱۰- اگر $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ، حاصل $\sqrt{1 - \sin 2x} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ برابر کدام است؟

۴) $-2 \sin x - 2 \cos x$

۳) $-2 \sin x$

۲) $-2 \cos x$

۱) ۰

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}{\sin 2x = 2 \sin x \cos x} \rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

بنابراین:

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = |\sin x - \cos x|$$

از طرفی چون به ازای $x \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ ، $\sin x > \cos x$ ، بنابراین:

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x - \cos x$$

از طرفی:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

و چون به ازای $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$ ، $\sin x < 0$ ، بنابراین:

$$|\sin x| = -\sin x$$

و خلاصه $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ ، بنابراین:

$$\sqrt{1 - \sin 2x} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} - \cos x = \sin x - \cos x - \sin x - \cos x = -2 \cos x$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



روش دوم:

می‌توانستیم زاویه دلخواه از بازه $\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ انتخاب کنیم، (مثلاً $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$) و به‌ازای آن حاصل عبارت صورت تست را به‌دست آوریم و ببینیم حاصل کدام گزینه به‌ازای آن با حاصل عبارت صورت تست برابر است. با قرار دادن $x = \frac{7\pi}{6}$ در عبارت صورت تست داریم:

$$\sqrt{1 - \sin \frac{7\pi}{6}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \frac{7\pi}{6}}} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{1+3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

دقت کنید:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و تنها گزینه ۲ به‌ازای $x = \frac{7\pi}{6}$ برابر $\sqrt{3}$ می‌شود.

۱۱- دوره تناوب $f(x) = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\tan x + \cot x}$ برابر کدام است؟

$\frac{\pi}{4}$ (۴)

2π (۳)

$\frac{\pi}{2}$ (۲)

π (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$(۱) \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

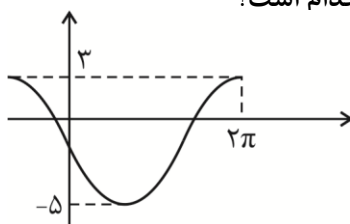
$$(۲) \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\tan x + \cot x} = \frac{\sin x \cos x \cos 2x}{\frac{1}{\sin x \cos x}} = \frac{1}{4} \sin(4x)$$

بنابراین دوره تناوب f برابر $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4}$ است.

۱۲- اگر بخشی از نمودار تابع $y = a \cos\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) + c$ به‌صورت زیر باشد، $ab + c$ برابر کدام است؟



2 (۲)

-4 (۱)

3 (۴)

-5 (۳)

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



اولاً؛ $\cos\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) = \sin bx$ ، بنابراین تابع به صورت $y = a \sin bx + c$ می‌باشد و با توجه به این که نمودار در برخورد با محور y ها نزولی است، $ab < 0$ (فرض می‌کنیم $b > 0$ و $a < 0$)، دقت کنید $-\sin x = \sin(-x)$ بنابراین فرقی ندارد که فرض کنیم $b > 0$ و $a < 0$ یا $b < 0$ و $a > 0$ است).
از طرفی:

$$y_{\max} + y_{\min} = 2c \Rightarrow 3 + (-5) = 2c \Rightarrow c = -1$$

$$y_{\max} - y_{\min} = 2|a| \Rightarrow 3 - (-5) = 2|a|$$

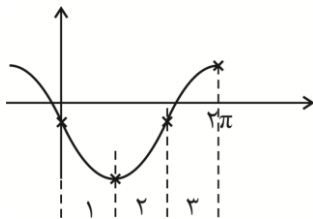
$$\Rightarrow |a| = 4 \xrightarrow{a < 0 \text{ فرض}} a = -4$$

با توجه به نمودار اگر فرض کنیم، یک دوره تناوب کامل برابر T است، فاصله 0 تا 2π برابر $\frac{3}{4}T$ می‌باشد.

(طول هر یک از قسمت‌های زیر به اندازه $\frac{T}{4}$ است)



و نمودار در بازه $[0, 2\pi]$ از سه قسمت تشکیل شده است.



بنابراین:

$$\frac{3T}{4} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{8\pi}{3}$$

از طرفی دوره تناوب $y = a \sin bx + c$ به صورت $T = \frac{2\pi}{|b|}$ می‌باشد و با برابر قرار دادن آنها داریم:

$$\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{4} \rightarrow b = \frac{3}{4} \text{ (b مثبت فرض شده)}$$

$$ab + c = (-4)\left(\frac{3}{4}\right) + (-1) = -3 - 1 = -4$$

نکته: در توابع با ضابطه $y = a \sin bx + c$ اگر نمودار در برخورد با محور y ها صعودی باشد، $ab > 0$ (↗) و اگر نمودار در

برخورد با محور y ها نزولی باشد، $ab < 0$ (↘) است.

و در توابع $y = a \cos bx + c$ نمودار روی محور y ها اکسترم دارد، که اگر ماکزیمم داشته باشد، $a > 0$ (↗) است و اگر مینیمم داشته باشد $a < 0$ (↘) است. در این توابع علامت b را نمی‌توان تعیین کرد زیرا $\cos(-x) = \cos x$ است.

۱۳- مجموعه جواب معادله $\cos 2x - \sin x = 0$ برابر کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \text{ (۳)}$$

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2k\pi}{3} \text{ (۱)}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۲

روش اول: می‌دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ بنابراین معادله به صورت زیر درمی‌آید.

$$(1 - \sin^2 x) - \sin x = 0 \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

که با تغییر متغیر $u = \sin x$ داریم:

$$u^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow u = -1, u = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{array} \right.$$

اجتماع جواب‌های فوق را می‌توان به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ در نظر گرفت.

روش دوم: استفاده از گزینه‌ها:

به این ترتیب که ابتدا زوایایی که گزینه‌ها مشخص می‌کنند را بشناسیم، سپس زاویه‌ای انتخاب کنیم که در بعضی از گزینه‌ها باشد و در بعضی نباشد و با امتحان آن در عبارت صورت تست، گزینه‌های شامل آن را حذف کنیم یا نگه‌داریم و این عمل را تکرار کنیم تا در نهایت یک گزینه باقی بماند.

$$\text{گزینه ۱: } \frac{2k\pi}{3} \quad \text{گزینه ۲: } \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad \text{گزینه ۳: } \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad \text{گزینه ۴: } k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$x = \frac{\pi}{6}$ در گزینه‌های ۲ و ۴ هست و در گزینه‌های ۱ و ۳ نیست و به‌ازای آن معادله برقرار است.

$$\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

پس یکی از گزینه‌های ۲ یا ۴ صحیح است.

حال زاویه دیگری را امتحان می‌کنیم که در یکی از دو گزینه ۲ یا ۴ باشد و در دیگری نباشد. مثلاً $x = \frac{3\pi}{4}$ که در گزینه ۲ هست اما در

گزینه ۴ نیست و به‌ازای $x = \frac{3\pi}{4}$ معادله برقرار است، یعنی:

$$\cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{4} = -1 + 1 = 0$$

پس گزینه ۲ جواب است.

روش سوم:

می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



بنابراین:

$$\cos 2x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

۱۴- اگر $f(x) = \begin{cases} [-x] & x > 1 \\ 0 & \text{اگر } x = 1 \\ x+2 & x < 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x + 1) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(1 + x^2)$ برابر کدام است؟

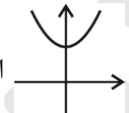
(۱) -۲ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۰

پاسخ: گزینه ۲

تابع $x^2 - x + 1$ در همسایگی $x = 0$ نزولی است، بنابراین هنگامی که $(x \rightarrow 0^+)$ ، در نتیجه $(x^2 - x + 1) \rightarrow 1^-$ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 2 = 3$$

(برای این که ببینیم $(x^2 - x + 1)$ از چپ به یک نزدیک می‌شود، می‌توانیم به جای x تقریبی از 0^+ مثلاً $0/1$ بگذاریم و ببینیم حاصل $x^2 - x + 1$ به ازای $0/1$ از یک کمتر می‌شود).

همین‌طور تابع $x^2 + 1$ در $x = 0$ دارای مینیمم است و نمودار آن به صورت  است، بنابراین با میل کردن x به صفر، $(x^2 + 1)$ با مقادیر بزرگ‌تر به یک نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-x] = [(-1)^+] = -2$$

(دقت کنید تابع $y = -x$ اکیداً نزولی است و هنگامی که $(x \rightarrow 1^+)$ ، در نتیجه $(-x \rightarrow (-1)^-)$).

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x + 1) - \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 + 1) = 3 - (-2) = 5$$

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x^2-1} = \frac{2}{3}$ باشد، $a-b$ برابر کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: چون با میل کردن x به سمت عدد ۱، مخرج به صفر میل می‌کند و حاصل حد بی‌نهایت نشده است، پس حتماً صورت هم به صفر میل می‌کند و بعد از ضرب شدن صورت در مزدوج خودش، عامل $(x-1)$ در صورت تولید می‌شود، یعنی،

$$\sqrt{a+b}-3=0 \Rightarrow a+b=9 \quad \text{اولاً:}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



ثانیاً:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{ax+b}+3}{\sqrt{ax+b}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b-9}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a \left(x + \frac{b-9}{a} \right)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+3)} = \frac{a}{2 \times 6} = \frac{a}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow a=8, \xrightarrow{a+b=9} b=1, a-b=7$$

دقت کنید $\sqrt{a+b}=3$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{ax+b}+3) = 3+3=6$$

روش دوم: استفاده از هوپیتال:

اولاً؛ $\sqrt{a+b}=3$ (به خاطر $\frac{0}{0}$ شدن حد) و با استفاده از هوپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x} = \frac{a}{2\sqrt{a+b}} = \frac{a}{2 \times 3} = \frac{a}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a=8 \xrightarrow{a+b=9} b=1 \Rightarrow a-b=7$$

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \frac{\cos x}{2\sin x - 1}$ ، $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}\right)^+} \frac{\cos x}{2\sin x - 1}$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$+\infty, -\infty$ (۴)

$-\infty, -\infty$ (۳)

$+\infty, +\infty$ (۲)

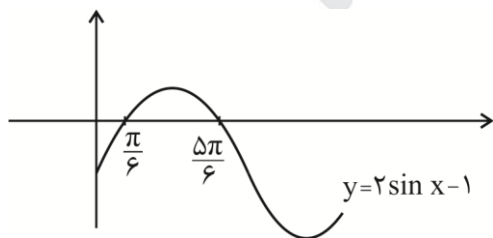
$-\infty, +\infty$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}\right)^+} \frac{\cos x}{2\sin x - 1} = \frac{\cos \frac{5\pi}{6}}{2\sin \left(\frac{5\pi}{6}\right)^+ - 1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1} = +\infty$$

توجه کنید، $y = 2\sin x - 1$ در $\frac{5\pi}{6}$ نزولی است، بنابراین حاصل آن به ازای $\left(\frac{5\pi}{6}\right)^+$ از صفر کمتر می شود.

این مطلب از روی نمودار هم مشخص است.



همین طور زمانی که $x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+$ ، آنگاه $(2\sin x - 1) \rightarrow 0^+$ چون $2\sin x - 1$ در $x = \frac{\pi}{6}$ صعودی است.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2 \sin \left(\frac{\pi}{6}\right)^+ - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - 1} = +\infty$$

توجه کنید، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و f در $x = a$ پیوسته باشد ($L = f(a)$)، در این صورت:

اگر تابع f در $x = a$ صعودی باشد، داریم:

$$(x \rightarrow a^+) \Rightarrow (f(x) \rightarrow L^+)$$

$$(x \rightarrow a^-) \Rightarrow (f(x) \rightarrow L^-)$$

و اگر تابع f در $x = a$ نزولی باشد داریم:

$$(x \rightarrow a^+) \Rightarrow (f(x) \rightarrow L^-)$$

$$(x \rightarrow a^-) \Rightarrow (f(x) \rightarrow L^+)$$

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$ باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر تابع $y = f\left(\frac{2}{x}\right)$ در $x_0 = 2$ کدام است؟

۵ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

$\frac{7}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$ است.

اولاً: $f(1) = 2$ است، ثانیاً: $f'(1) = 3$.

از طرفی برای نوشتن معادله خط مماس بر $y = f\left(\frac{2}{x}\right)$ در $x_0 = 2$ احتیاج به مقدار تابع و مشتق تابع به ازای $x_0 = 2$ داریم، یعنی:

$$y(2) = f\left(\frac{2}{2}\right) = f(1) = 2$$

$$y'(x) = \frac{-2}{x^2} f'\left(\frac{2}{x}\right) \xrightarrow{x=2} y'(2) = \frac{-2}{4} f'\left(\frac{2}{2}\right) \Rightarrow y'(2) = -\frac{1}{2} f'(1) \xrightarrow{f'(1)=3} y'(2) = -\frac{3}{2}$$

بنابراین معادله خط مماس به صورت زیر می باشد:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = 5$$

(برای به دست آوردن عرض از مبدأ در معادله خط به جای x ، صفر می گذاریم).

۱۸- اگر $f(x) = (x^2 + ax + 2)|x - 1|$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد، a کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۳ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



روش اول:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + ax + 2)(x-1) & x \geq 1 \\ (x^2 + ax + 2)(1-x) & x < 1 \end{cases}$$

f در $x=1$ پیوسته است $\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0 \right)$ ، بنابراین برای مشتق پذیر بودن f در $x=1$ باید مشتق چپ و راست f در $x=1$ را برابر قرار دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} (2x+a)(x-1) + (x^2 + ax + 2) & x \geq 1 \\ (2x+a)(1-x) - (x^2 + ax + 2) & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = 1+a+2 = 3+a, f'_-(1) = -(1+a+2) = -3-a$$

بنابراین:

$$3+a = -3-a \Rightarrow a = -3$$

روش دوم: اگر $g(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ پیوسته باشد، ولی مشتق چپ و راست نابرابر داشته باشد و h تابعی پیوسته در $x = \alpha$ باشد که $h(\alpha) = 0$ باشد، تابع $y = h(x)g(x)$ در $x = \alpha$ مشتق پذیر می‌باشد، بنابراین کافی است $(x^2 + ax + 2)$ به‌ازای $x=1$ صفر شود، یعنی:

$$1+a+2=0 \Rightarrow a=-3$$

دقت کنید $y = |x-1|$ در $x=1$ پیوسته است ولی مشتق چپ و راست نابرابر دارد.

۱۹- اگر $A(1,2)$ اکسترم نسبی تابع $f(x) = \frac{ax^2+1}{x+b}$ باشد، a کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

-۱, ۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول: اگر $A(x_A, y_A)$ اکسترم نسبی تابع مشتق پذیر f باشد:

$$f(x_A) = y_A$$

$$f'(x_A) = 0$$

اولاً:

ثانیاً:

بنابراین:

$$\frac{a+1}{1+b} = 2 \Rightarrow a-2b=1 \Rightarrow b = \frac{a-1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{2ax(x+b) - (ax^2+1)}{(x+b)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2a(1+b) - a - 1}{(1+b)^2} = 0 \Rightarrow a + 2ab - 1 = 0 \Rightarrow \xrightarrow{b = \frac{a-1}{2}} a + 2a\left(\frac{a-1}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$a + a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1, -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1, b = \frac{a-1}{2} \Rightarrow b = 0 \\ a = -1, b = \frac{a-1}{2} \Rightarrow b = -1 \end{cases} \times \text{در این صورت } x=1 \text{ ریشهٔ مخرج می‌باشد.}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



روش دوم:

نکته: در توابع کسری مختصات اکسترمم در معادله حاصل از هوپیتال صدق می کند، بنابراین:

$$f(x) = \frac{ax^2 + 1}{x + b} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} y = 2ax \xrightarrow{(1,2)} 2 = 2a \Rightarrow a = 1$$

روش سوم: اگر $A(x_A, y_A)$ اکسترمم نسبی تابع مشتق پذیر f باشد، معادله $f(x) = y_A$ دارای ریشه مضاعف $x = x_A$ است، بنابراین:

$$\frac{ax^2 + 1}{x + b} = 2 \Rightarrow ax^2 + 1 = 2x + 2b \Rightarrow ax^2 - 2x + 1 - 2b = 0$$

دارای ریشه مضاعف $x = 1$ است، یعنی به صورت $a(x-1)^2 = ax^2 - 2ax + a = 0$ است، بنابراین داریم:

$$x^2 \text{ ضرایب } \Rightarrow a = a$$

$$x \text{ ضرایب } \Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{اعداد ثابت برابرند } \Rightarrow a = 1 - 2b \xrightarrow{a=1} 1 = 1 - 2b \Rightarrow b = 0$$

۲۰- کمترین مقدار تابع $f(x) = x - 1 - \sqrt{2x - x^2}$ برابر کدام است؟

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$-\sqrt{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا نقاط بحرانی تابع را مشخص می کنیم:

 $D_f = [0, 2]$ بنابراین $x = 0$ و $x = 2$ نقاط بحرانی هستند:

$$f'(x) = 1 - \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = 1 - \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow 2x - x^2 = 1 + x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+\sqrt{8}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \times \\ x = \frac{4-\sqrt{8}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \quad \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید f' به ازای $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ صفر نمی شود.

حال مقادیر تابع را در نقاط بحرانی آن محاسبه می کنیم و کوچکترین آنها را به عنوان مینیمم انتخاب می کنیم.

$$f(0) = -1$$

$$f(2) = 1$$

$$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1 - \sqrt{2 - \sqrt{2} - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2 - \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} + \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

۲۱- مستطیلی با محیط ۲۴ را حول عرض آن دوران می دهیم، اگر حجم حاصل از دوران ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل برابر کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

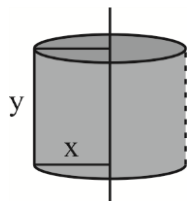
پاسخ: گزینه ۲

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$2(x+y)=24 \Rightarrow x+y=12 \Rightarrow y=12-x$$

از طرفی حجم حاصل از دوران برابر $V = \pi x^2 y$ است.



با قرار دادن $12-x$ به جای y ، تابع جدید یک متغیره‌ای داریم که می‌توانیم از آن مشتق بگیریم و طول نقاط بحرانی آن را مشخص کنیم.

$$V = \pi x^2 (12-x) = 12\pi x^2 - \pi x^3$$

$$V' = 24\pi x - 3\pi x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 8$$

از طرفی:

$$y = 12 - x \xrightarrow{x=8} y = 4 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{8}{4} = 2$$

(دقت کنید حجم به‌ازای $x=0$ مینیمم می‌شود و به‌ازای $x=8$ ماکزیمم).

۲۲- مجموع فواصل نقطه A از دو نقطه $N(6,3)$ و $M(-2,3)$ برابر ۱۰ واحد است، بیشترین مقدار عرض A کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

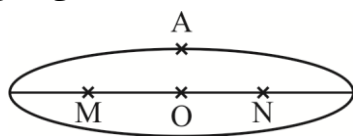
۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

با توجه به تعریف بیضی، A نقطه‌ای روی یک بیضی افقی با کانون‌های M و N است که قطر بزرگ آن $2a=10$ و فاصله کانونی آن $2c=8$ است، بنابراین: $b=3$ است. $(a^2 = b^2 + c^2)$

از طرفی مختصات O مرکز بیضی (وسط MN)، $(2,3)$ است و بیشترین مقدار عرض A هنگامی است که A روی رأس غیر کانونی بیضی و بالای O و به فاصله b از O قرار می‌گیرد که در این حالت $y_A = 3+3=6$ است.



روش دوم: در واقع، بیشترین عرض A زمانی است که A روی عمودمنصف MN قرار می‌گیرد و $AM=AN=5$ که در این حالت چون $ON=4$ پس با استفاده از قضیه فیثاغورس $AO=3$ و کافی است به عرض O سه واحد اضافه کنیم. (در این روش احتیاجی به تعریف بیضی نداریم)

۲۳- شعاع دایره‌ای که معادله یکی از قطرهای آن $y=x+1$ و محور y ها را در نقاطی به عرض‌های $y=1$ و $y=5$ قطع می‌کند، کدام است؟

۵ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول: مرکز دایره روی عمودمنصف دو نقطه $(0,1)$ و $(0,5)$ یعنی $y=3$ قرار دارد، از طرفی مرکز دایره روی $y=x+1$ نیز هست، بنابراین مختصات مرکز $(2,3)$ است. (محل برخورد $y=3$ و $y=x+1$)

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



حال کافی است فاصله $(2, 3)$ را تا یکی از نقاط $(0, 1)$ یا $(0, 5)$ به دست آوریم، یعنی:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

روش دوم: چون مرکز روی خط $y = x + 1$ است، بنابراین مختصات آن به صورت $(\alpha, \alpha + 1)$ است، از طرفی فاصله مرکز تا دو نقطه $(0, 1)$ و $(0, 5)$ یکسان و برابر شعاع دایره است، بنابراین:

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 4)^2} \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2 - 8\alpha + 16 \Rightarrow 8\alpha = 16 \Rightarrow \alpha = 2$$

حال با قرار دادن $\alpha = 2$ در رابطه شعاع، داریم:

$$R = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} \xrightarrow{\alpha=2} R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۲۴- میانگین و واریانس ۸ داده آماری به ترتیب ۱۰ و ۵ می باشد، اگر دو داده ۵ و ۱۵ را به داده ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده های جدید کدام است؟

۱/۸ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۹ (۲)

۰/۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به این که:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 10)^2 + \dots + (x_8 - 10)^2}{8} \Rightarrow 40 = (x_1 - 10)^2 + \dots + (x_8 - 10)^2$$

با اضافه شدن دو داده ۵ و ۱۵ که میانگین آنها عدد ۱۰ می باشد، میانگین ۱۰ داده تغییر نمی کند، ولی واریانس را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 10)^2 + \dots + (x_8 - 10)^2 + (15 - 10)^2 + (5 - 10)^2}{10} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{40 + 25 + 25}{10} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{10} = 0/3$$

بنابراین:

۲۵- علی در دو آزمون مستقل شرکت می کند، اگر احتمال قبولی او در آزمون اول ۰/۶ و احتمال قبولی او در آزمون دوم ۰/۷ باشد، با کدام احتمال فقط در یک آزمون قبول می شود؟

۰/۵۴ (۴)

۰/۴۲ (۳)

۰/۴۶ (۲)

۰/۵۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

علی یا در آزمون اول قبول می شود و در آزمون دوم نمی شود و یا در آزمون دوم قبول می شود و در آزمون اول نمی شود، بنابراین اگر $P(A)$ احتمال قبولی در آزمون اول و $P(B)$ احتمال قبولی در آزمون دوم باشد، احتمال قبولی برابر است با:

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A \cap B') + P(B \cap A') =$$

$$P(A)P(B') + P(B)P(A') = 0/6 \times 0/3 + 0/7 \times 0/4 = 0/18 + 0/28 = 0/46$$

دقت کنید چون A و B مستقل اند، پس (A', B) , (B', A) هم مستقل اند و

$$P(B \cap A') = P(B) \times P(A')$$

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



نکته: در حالت کلی داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A' \cap B') = \underbrace{P(A - B)}_{A \cap B'} + \underbrace{P(B - A)}_{B \cap A'} + P(A \cap B)$$

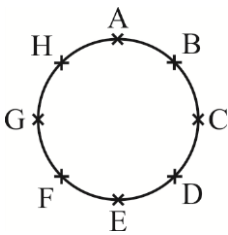
$$\Rightarrow P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

و اگر A و B مستقل باشند، تمامی اشتراک‌ها به ضرب تبدیل می‌شوند، یعنی:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 1 - P(A') \times P(B') \\ &= P(A) \times P(B') + P(B) \times P(A') + P(A) \times P(B) \end{aligned}$$

۲۶- می‌خواهیم با ۸ نقطه روی دایره زیر یک چهار ضلعی بسازیم، اگر A و D به عنوان رأس انتخاب شده باشند، با کدام

احتمال AD قطر چهار ضلعی است؟



$$\frac{8}{15} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

چون A و D به عنوان رأس انتخاب شده‌اند، برای داشتن ۴ ضلعی دو رأس دیگر لازم داریم، بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $\binom{6}{2}$ است.

حال برای این که AD قطر باشد، باید یک رأس از بین دو نقطه C, B انتخاب شود و رأس دیگر از بین ۴ نقطه H, G, F, E. بنابراین تعداد اعضای پیشامد برابر است با $\binom{2}{1} \times \binom{4}{1}$.

$$\frac{\binom{2}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

بنابراین احتمال این که AD قطر باشد برابر است با:

نکته: در احتمال شرطی با توجه به رابطه زیر، می‌توانیم B را فضای نمونه‌ای جدید و $A \cap B$ را پیشامد جدید در نظر بگیریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

در این مسأله، رأس بودن A و D را به عنوان فضای نمونه‌ای جدید در نظر گرفته‌ایم و قطر بودن AD را به عنوان پیشامد. این مثال‌رو هم ببینید:

دو تاس را پرتاب کرده‌ایم اگر بدانیم مجموع آنها بزرگ‌تر از ۷ است، احتمال این که هر دو زوج باشند چقدر است؟

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{15} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



روش اول:

اگر پیشامد هر دو تاس زوج ظاهر شوند را A و پیشامد مجموع دو تاس بزرگتر از ۷ باشد را B بنامیم باید $P(A|B)$ را به دست آوریم (هر دو زوج باشند، به شرط بزرگتر از ۷ بودن مجموع دو تاس). از طرفی:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

مجموع دو تاس بزرگتر از ۷ باشد، یعنی: یا مجموع دو تاس برابر ۸ است که ۵ حالت دارد:

$(۶, ۲), (۵, ۳), (۴, ۴), (۳, ۵), (۲, ۶)$

یا مجموع دو تاس برابر ۹ است که ۴ حالت دارد:

$(۶, ۳), (۵, ۴), (۴, ۵), (۳, ۶)$

یا مجموع دو تاس برابر ۱۰ است که ۳ حالت دارد:

$(۶, ۴), (۵, ۵), (۴, ۶)$

یا مجموع دو تاس برابر ۱۱ است که ۲ حالت دارد:

$(۶, ۵), (۵, ۶)$

و یا مجموع دو تاس برابر ۱۲ است که ۱ حالت دارد:

$(۶, ۶)$

(جدول مجموع دو تاس در صفحه بعد آورده شده است).

از طرفی تنها در صورتیکه مجموع دو تاس زوج باشد ممکن است هر دو تاس زوج باشد یعنی:

$(۶, ۲)(۴, ۴)(۲, ۶)(۴, ۶)(۶, ۴)(۶, ۶)$

برای مجموع ۱۲ برای مجموع ۱۰ برای مجموع ۸

$$n(A \cap B) = ۳ + ۲ + ۱ = ۶$$

(تعداد حالاتی که هر دو تاس زوج ظاهر شود و مجموع بزرگتر از ۷ باشد).

از طرفی:

$$n(B) = ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۱۵$$

بنابراین:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

روش دوم: (با توجه به جدول مجموع دو تاس)

در پرتاب دو تاس، تعداد حالاتی که هر دو تاس زوج ظاهر شود و مجموع دو تاس بزرگتر از ۷ باشد برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} (۶, ۲) \quad (۴, ۴) \quad (۲, ۶) \rightarrow \text{حالت ۳} \\ (۶, ۴) \quad (۴, ۶) \rightarrow \text{حالت ۲} \\ (۶, ۶) \rightarrow \text{حالت ۱} \end{array} \right\} \Rightarrow ۳ + ۲ + ۱ = ۶$$

و تعداد حالاتی که مجموع دو تاس بزرگتر از ۷ باشد برابر:

مجموع ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲

$$۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۱۵ \Rightarrow P(A|B) = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



یادآوری: جدول مجموع دو تاس:

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	(۱,۱)	(۱,۲) (۲,۱)	(۱,۳) (۲,۲) (۳,۱)	(۱,۴) (۲,۳) (۳,۲) (۴,۱)	(۱,۵) (۲,۴) (۳,۳) (۴,۲) (۵,۱)	(۱,۶) (۲,۵) (۳,۴) (۴,۳) (۵,۲) (۶,۱)	(۲,۶) (۳,۵) (۴,۴) (۵,۳) (۶,۲)	(۳,۶) (۴,۵) (۵,۴) (۶,۳)	(۴,۶) (۵,۵) (۶,۴)	(۵,۶) (۶,۵)	(۶,۶)

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۲۷- در یک کارخانه، ۳۰٪ محصولات توسط دستگاه A، ۶۰٪ توسط دستگاه B و بقیه توسط دستگاه C تولید می‌شود. اگر ۰/۰۲ محصولات A، ۰/۰۱ محصولات B و ۰/۰۶ محصولات C معیوب باشد، با انتخاب یکی از محصولات این کارخانه با چه احتمالی معیوب است؟

$$۰/۰۲۱(۴)$$

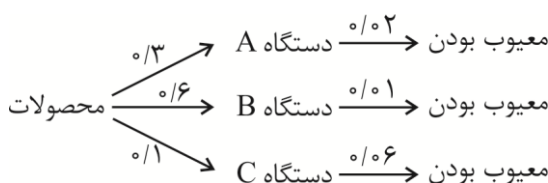
$$۰/۰۰۳(۳)$$

$$۰/۰۱۸(۲)$$

$$۰/۰۱۲(۱)$$

پاسخ: گزینه ۲

این محصول یا توسط A تولید شده و معیوب است یا توسط B تولید شده و معیوب است و یا توسط C تولید شده و معیوب است.

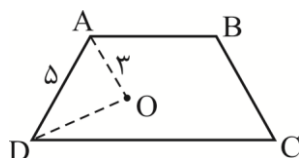


اگر $P(M|A)$ احتمال معیوب بودن به شرط تولید شدن توسط دستگاه A باشد و $P(A)$ احتمال تولید شدن محصول توسط دستگاه A باشد و $P(M|B)$ و $P(M|C)$ هم مشابه $P(M|A)$ تعریف شوند و $P(B)$ و $P(C)$ مشابه $P(A)$ باشند، بنابراین احتمال معیوب بودن محصول برابر است با:

$$P(A) \times P(M|A) + P(B) \times P(M|B) + P(C) \times P(M|C)$$

$$= \frac{30}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{6}{100} = \frac{6+6+6}{1000} = \frac{18}{1000} = 0/018$$

۲۸- در دوزنقه زیر، نقطه O محل برخورد نیم‌ساز دو زاویه A, D است، اگر $OA = 3$ و $AD = 5$ باشد مساحت AOD برابر کدام است؟



$$۴(۲)$$

$$۸(۱)$$

$$۶(۴)$$

$$۵(۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ بنابراین $\hat{D}_1 + \hat{A}_1 = 90^\circ$ و در نتیجه $\hat{O} = 90^\circ$ و طبق قضیه فیثاغورس $OD = 4$ و مساحت AOD برابر $6 = \frac{OA \times OD}{2} = \frac{3 \times 4}{2}$.

نکته: اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، دو زاویه پدید آمده مکمل اند $\hat{BAX} + \hat{YBA} = 180^\circ$ و $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ زاویه بین نیمسازهای آنها $\hat{AOB} = 90^\circ$ است.

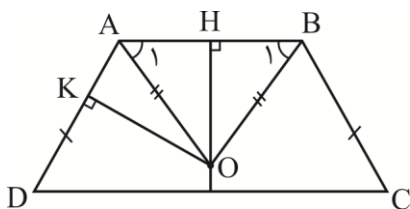
۲۹- در دوزنقه متساوی الساقین ABCD ($AD = BC$)، نقطه‌ای که از ضلع‌های AB و AD به یک فاصله، و از رؤس A و B به یک فاصله است، کدام است؟

- (۱) نقطه برخورد عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویه A
(۲) نقطه برخورد عمودمنصف ضلع AD و نیمساز زاویه A
(۳) نقطه برخورد عمودمنصف AB و BC
(۴) نقطه برخورد نیمسازهای زوایای A و B

پاسخ: گزینه ۴

در واقع نقطه مورد نظر محل برخورد نیمساز زاویه A با عمودمنصف ضلع AB است، ولی چون دوزنقه متساوی الساقین است، محل برخورد نیمسازهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ روی عمودمنصف AB است.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2}, \hat{A} = \hat{B} \\ OH = OH \text{ (مشترک)} \\ AH = BH \text{ (OH عمودمنصف AB)} \end{cases}$$



بنابراین $OA = OB$ و طبق خاصیت نیمساز چون O روی نیمساز زاویه A است، $OK = OH$.

۳۰- در مثلث ABC با اضلاع $AB = 2$ و $AC = 3$ ، از نقطه C به موازات نیمساز زاویه A (AD) خطی رسم کرده‌ایم تا امتداد AB را در E قطع کند. نسبت مساحت ABD به مساحت ACE کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه ۱

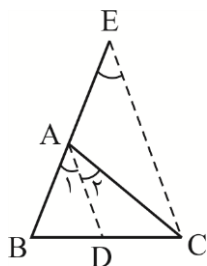
روش اول: دو مثلث ACE و ABC دارای ارتفاع مشترک CH هستند، بنابراین نسبت مساحت دو مثلث برابر نسبت قاعده‌های آنهاست

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB} \text{ یعنی:}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



(طبق قضیه خطوط موازی و مورب $\hat{A}_1 = \hat{E}$ و $\hat{A}_1 = \hat{E}$ و از طرفی AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ بنابراین $\hat{A}_2 = \hat{E}$ و مثلث ACE متساوی الساقین و $AE = AC$).
بنابراین:



$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABC}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$$

همین‌طور دو مثلث ABC و ABD هم، ارتفاع مشترک AH' را دارند بنابراین نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده‌هاست یعنی:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{2}{5}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \frac{\frac{2}{5} S_{ABC}}{\frac{3}{2} S_{ABC}} = \frac{4}{15}$$

نکته: اگر AD نیمساز زاویه A باشد:

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{DK \times AC}{2}}{\frac{DE \times AB}{2}} = \frac{\frac{AH' \times DC}{2}}{\frac{AH' \times BD}{2}} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BD}$$



بنابراین در این مسأله داریم:

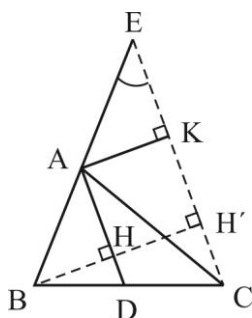
$$\frac{DC}{BD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{2}{2+3} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{2}{5}$$

روش دوم: می‌توانیم با به‌دست آوردن نسبت ارتفاع‌ها و نسبت قاعده‌های دو مثلث نیز، نسبت مساحت‌ها را به‌دست آوریم:

$$\frac{AD}{EC} = \frac{BA}{BA+AE} \xrightarrow[\frac{BA=2}{AE=AC=3}]{\frac{AE=AC=3}{BA=2}} \frac{2}{5} = \frac{BH}{BH'}$$

$$\frac{BH}{AK} = \frac{2}{3} \quad \text{بنابراین:}$$

بنابراین:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \frac{\frac{BH \times AD}{2}}{\frac{AK \times EC}{2}} = \frac{BH \times AD}{AK \times EC} = \frac{\frac{2}{3} AK \times \frac{2}{5} EC}{AK \times EC} = \frac{4}{15}$$

